TD de mécanique n°1
Cinématique du point matériel

Soit $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude utilisé pour tous les exercices. Les grandeurs cinématiques recherchées seront toujours exprimées dans ce référentiel d'étude et les trajectoires du point matériel étudié seront représentées dans ce même référentiel d'étude.

Exercice 1 - Analogie optique.

A l'instant $t = 0$ un promeneur situé en un point $A(x = 0,\ z = 0)$ aperçoit un baigneur qui se trouve en difficulté en un point $B(x_B,\ z_B)$ d'un lac.
Ce promeneur se met à courir suivant AI à la vitesse constante v_1 et à nager suivant IB à la vitesse constante v_2. Les trajets AI et IB sont inclinés de i_1 et i_2 par rapport à (Az).
Etablir la relation entre i_1, i_2, v_1 et v_2 pour que le promeneur parvienne en B le plus vite possible.

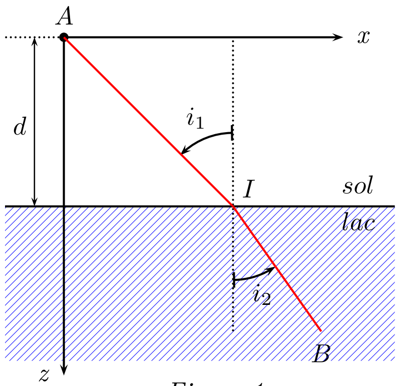

Figure 1

Déterminer la durée totale du trajet de A à B, notée $\Delta t_{A\to B}$.
Cette grandeur est fonction de la position du point I, $\Delta t_{A\to B} = f(x_I)$.
Traduire le fait que pour la position de I recherchée la durée du trajet de A à B est minimale.
Réponse : la relation recherchée est $\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$.

Remarque : en remplaçant le sol et le lac par des milieux d'indices optiques n_1 et n_2, A par une source lumineuse ponctuelle et B par un observateur, on peut retrouver la seconde loi de DESCARTES en supposant que la lumière suit le chemin optique AIB le plus court (cf. chapitre 1 d'optique).

Exercice 2 - Etude d'un mouvement spiral.

Un point M décrit une courbe plane d'équation polaire :

$$r = a\exp(-t/\tau) \text{ et } \theta = \omega t \qquad \text{où } a,\ \tau \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

La figure 2 représente la trajectoire du point M.

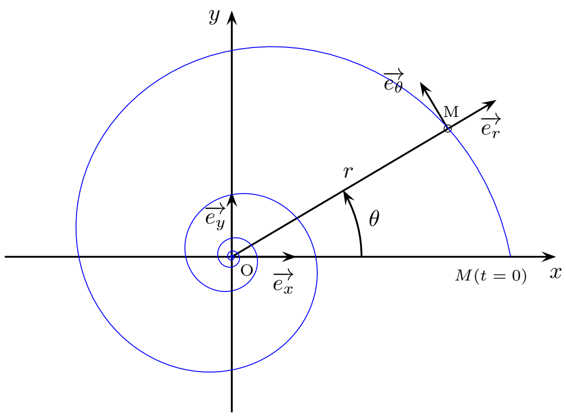

Figure 2

1 . Calculer la vitesse et l'accélération du point M en coordonnées polaires.

2 . Calculer l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}\right)$. Commentaire.

1. *Réponse : l'expression du vecteur vitesse est :* $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = a\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\left[-\dfrac{1}{\tau}\vec{e_r} + \omega\vec{e_\theta}\right]$

l'expression du vecteur accélération est : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = a\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\left[\left(\dfrac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e_r} - \dfrac{2\omega}{\tau}\vec{e_\theta}\right]$

2. *Exprimer le produit scalaire* $\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}\right)$ *de deux manières. Réponse :* $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$

Exercice 3 - Satellite.

Un satellite décrit une trajectoire elliptique dont l'équation en coordonnées polaires est :

$r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ où $p,\ e < 1$ sont deux paramètres constants (paramètre et excentricité de l'ellipse) et $\theta \in [0\,;2\pi]$

1 . Déterminer la vitesse du satellite en tout point en coordonnées polaires.

2 . Quelle est l'expression générale de l'accélération en coordonnes polaires ? Comment se simplifie cette expression lorsque la grandeur $r^2\dot{\theta}$ est constante (*loi des aires*) ?

1. *Réponse : l'expression du vecteur vitesse est :* $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dfrac{p\,\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e\,\sin\theta\ \vec{e_r} + (1+e\cos\theta)\,\vec{e_\theta}\right]$

2. *Dériver temporellement la relation* $r^2\dot{\theta} = Cte$.

Exercice 4 - Trajectoire d'un ballon-sonde.

On assimile un ballon-sonde à un point matériel M. Lâché au niveau du sol, il acquiert quasi immédiatement une vitesse verticalev_0, qu'on suppose constante dans la suite du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale v_x orientée suivant l'axe (Ox), et proportionnelle à son altitude z mesurée par rapport au niveau du sol $v_x = \dfrac{z}{\tau}$ où τ est une constante positive dimensionnellement homogène à un temps.
A l'instant $t = 0$, le ballon-sonde est lâché depuis le point O. On note $(x(t),\ z(t))$ les coordonnées cartésiennes du point M.

1 . Écrire les deux équations différentielles vérifiées par x et z.

2 . En déduire les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ en fonction de v_0, τ et t.

3 . Déterminer l'équation $x(z)$ de la trajectoire suivie par le ballon-sonde au cours de son ascension. Quelle est sa nature ?

4 . Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{e_x},\ \vec{e_z})$ les composantes du vecteur accélération du ballon-sonde.

1. *Traduire l'énoncé.*

2. *Intégrer les équations différentielles trouvées précédemment. Réponse :* $\begin{cases} z = v_0 t \\ x = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0}{\tau}t^2 \end{cases}$

3. *Réponse : l'expression du vecteur accélération est* $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \dfrac{v_0}{\tau}\vec{e_x}$

Exercice 5 - Mouvement hélicoïdal.

Un point matériel M, repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x,\ y,\ z)$, a un mouvement d'équations horaires

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = kt \end{cases} \qquad \text{avec } R, \omega \text{ et } k \text{ des constantes positives}$$

1 . Déterminer les équations horaires $(r(t),\ \theta(t),\ z(t))$ en coordonnées cylindriques. Quel renseignement l'équation $r(t)$ apporte-t-elle ?

2 . Exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

3 . Montrer que l'angle α formé par le vecteur vitesse avec le plan horizontal (Oxy) est constant.

1. Utiliser les formules pour passer des cordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques.

Réponse : $\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = kt \end{cases}$

2. Réponse : *l'expression du vecteur vitesse est :* $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = R\,\omega\,\vec{e_\theta} + k\,\vec{e_z}$

l'expression du vecteur accélération est : $\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = -R\omega^2\,\vec{e_r}$

3. Réponse : $\cos\alpha = \dfrac{R\omega}{\sqrt{R^2\,\omega^2\; + k^2}}$

Exercice 6 - Échelle double.

Une échelle double (figure 3) est posée sur le sol, un de des points d'appui restant constamment en contact avec le coin O d'un mur.
La position de l'échelle à l'instant t est repérée par l'angle $\alpha(t)$ formé par la portion OA de l'échelle avec le mur.
L'extrémité B de l'échelle glisse sur le sol.
L'échelle est telle que $OA = AB = \ell$.

1 . Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ et accélération $\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}}$ du point A dans la base polaire $(\vec{e_r}\ ,\ \vec{e_\theta})$ en fonction de ℓ , α, $\dot\alpha$ et $\ddot\alpha$.

2 . Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{e_x}\ ,\ \vec{e_y})$ les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}$ et accélération $\vec{a}(B)_{/\mathcal{R}}$ du point B en fonction ℓ, α, $\dot\alpha$ et $\ddot\alpha$.

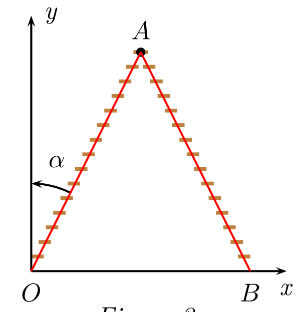

Figure 3

1.	*Réponse*	*l'expression du vecteur vitesse est :*	$\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}} = -\ell\,\dot\alpha\,\vec{e_\theta}$
		l'expression du vecteur accélération est :	$\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = -\ell\,\dot\alpha^2\,\vec{e_r} - \ell\,\ddot\alpha\,\vec{e_\theta}$
2.	*Réponse*	*l'expression du vecteur vitesse est :*	$\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}} = 2\ell\,\dot\alpha\,\cos\alpha\,\vec{e_x}$
		l'expression du vecteur accélération est :	$\vec{a}(B)_{/\mathcal{R}} = 2\ell\left(\ddot\alpha\cos\alpha - \dot\alpha^2\sin\alpha\right)\vec{e_x}$

Exercice 7 - Mouvement défini par des équations différentielles.

Les équations différentielles régissant le mouvement d'un point matériel vérifient

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\omega\dot{y} \\ \ddot{y}(t) = \omega\dot{x} \qquad \text{avec } \omega \text{ une constante positive} \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_{0x} > 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \qquad \dot{z}(0) = v_{0z} > 0 \end{cases}$$

1 . Déterminer les équations horaires $(x(t),\ y(t),\ z(t))$.

2 . Décrire la projection du mouvement dans le plan (Oxy) et celle selon l'axe (Oz).

Exercice 8 - Mouvement plan de vecteur accélération connu.

Un point matériel évolue dans le plan (Oxy). Initialement, sa position en coordonnées polaires est $(r(0) = r_0 > 0, \theta(0) = 0)$ et sa vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_\theta}$ avec $v_0 > 0$. Au cours du mouvement, son accélération vérifie :

$$\vec{a} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{e_r} \qquad \text{avec } \alpha > 0$$

1 . Montrer que la quantité $r^2\dot\theta$ est constante. L'exprimer en fonction de r_0 et v_0.

2 . Pour r_0 fixé, comment choisir v_0 pour obtenir un mouvement circulaire ?